

# 均匀外磁场中铁质球体系统磁场的镜像解析解

姚振宁,刘大明,周国华,朱兴乐

(海军工程大学电气工程学院,湖北武汉 430033)

**摘要:** 均匀外磁场中铁质球体系统磁场的计算一般是比较困难的,这是因为铁质球体之间的相互磁化比较难处理.从点磁荷与磁介质球系统中的镜像法出发,对磁介质球中的镜像线磁荷进行简化等效,推导出铁质球体系统中镜像磁偶极子和镜像磁荷的表达式.然后计算铁质球体之间各阶相互磁化而产生的附加磁场,进而求出铁质球体系统磁场的镜像解析解,并分析讨论了镜像解析解最大阶数的选择.仿真实验结果表明,镜像解析解的误差非常小,且适用于各种相对磁导率下铁质球体系统磁场的计算.

**关键词:** 铁质球体系统; 镜像解析解; 磁偶极子; 磁荷

**中图分类号:** TM153.1      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2014)09-1665-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.09.001

## The Image Analytical Solution of the Magnetic Field for Ferromagnetic Sphere System in a Uniform External Magnetic Field

YAO Zhen-ning, LIU Da-ming, ZHOU Guo-hua, ZHU Xing-le

(College of Electrical Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan, Hubei 430033, China)

**Abstract:** It is very difficult to calculate the magnetic field which a ferromagnetic sphere system produces in a uniform external magnetic field, as a result of the difficulty in handling the mutual magnetization between the ferromagnetic spheres. The expressions of image magnetic dipole and magnetic charge were derived from image method of the system that consists of the point magnetic charge and magnetic medium sphere on condition that the image linear magnetic charges were simplified. Additional magnetic field was calculated, which ferromagnetic spheres produce because of the mutual magnetization. The image analytical solution was obtained according to the basic expression for magnetic field of the ferromagnetic sphere system, and the choice of the maximum order is analyzed. The verified results of the simulation experiment show that the image analytical solution has a very small error, and applies to all ferromagnetic sphere systems.

**Key words:** ferromagnetic sphere system; analytical solution of image; magnetic dipole; magnetic charge

### 1 引言

均匀外磁场或电场中球体间的相互作用计算属于电磁学多体问题,可应用于磁流变液和电流变液中<sup>[1,2]</sup>.单个铁质球体在均匀外磁场中被均匀磁化,在其周围空间产生的磁场是有解析解的.由两个或两个以上的铁质球体组成的系统在均匀外磁场中的磁化比较复杂,系统中的铁质球体不仅被外磁场磁化,而且铁质球体之间也会相互磁化,系统磁场并不等于各个铁质球体单独存在时被外磁场磁化而产生磁场的叠加,其求解需要进行复杂的积分运算.

目前,对电场中含有多电介质球的研究有很多,这些研究可以应用到均匀外磁场中铁质球体系统磁场的计算上.文献[3~5]分别利用双球坐标系、逆矢径变换法和正交函数展开法求出了介质双球静电问题的解析解,但解析解是无穷级数的形式,计算比较复杂.文献[6~8]采用多极矩展开法计算多个电介质球相互作用力,多极矩展开的优点是可以直接处理球体的多极矩以及相互作用,但当电介质球的相对介电常数较大时,需要计算的高阶多极矩的项数迅速增多,收敛速度迅速变慢.文献[9~11]通过镜像法确定导体球系统的电场分布或偶极矩,镜像法计算精度较高,且比多极矩展开法

计算速度要快,但原则上只适用于相对介电常数足够大的电介质球或导体球组成的系统.

本文从点磁荷与磁介质球系统中的镜像法出发,为避免复杂的积分运算,对磁介质球中的镜像线磁荷进行简化等效,推导出铁质球体系统中镜像磁偶极子和镜像磁荷的表达式,进而求出铁质球体系统磁场的镜像解析解.

## 2 铁质球体系统磁场的基本表达式

对于由两个以上的铁质球体组成的系统,其磁场的计算与由两个铁质球体组成的系统类似.

如图 1 所示,系统中两个线性铁质球体半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ,相对磁导率均为  $\mu_r$ ,球心相距为  $d$ ,周围空间介质为真空,  $H_e$  为均匀外磁场.

首先,在不考虑两个铁质球体之间相互磁化情况下,两个铁质球体分别被  $H_e$  均匀磁化,而均匀磁化的球体与磁偶极子在周围空间产生的磁场具有相同的形式,即  $H_e$  将在各球球心分别激发一个磁偶极子,磁矩分别为

$$\begin{cases} m_1 = \frac{4\pi(\mu_r - 1)}{\mu_r + 2} R_1^3 H_e \\ m_2 = \frac{4\pi(\mu_r - 1)}{\mu_r + 2} R_2^3 H_e \end{cases} \quad (1)$$

因此,两个铁质球体在周围空间任一场点  $P$  产生的磁场分别为

$$\begin{cases} H_1 = \frac{3(m_1 \cdot r_1)r_1}{4\pi r_1^5} - \frac{m_1}{4\pi r_1^3} \\ H_2 = \frac{3(m_2 \cdot r_2)r_2}{4\pi r_2^5} - \frac{m_2}{4\pi r_2^3} \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $r_1$ 、 $r_2$  的方向分别由球心  $O_1$ 、 $O_2$  指向场点  $P$ .

然后,仅考虑这两个均匀磁化的铁质球体之间相互磁化,则两个铁质球体在场点  $P$  又会分别产生附加磁场  $H'_1$  和  $H'_2$ ,假设铁质球体系统在场点  $P$  产生的总磁场为  $H$ ,则有

$$H = H_1 + H_2 + H'_1 + H'_2 \quad (3)$$

上式即为均匀外磁场中铁质球体系统在其周围空间产生磁场的基本表达式,磁场  $H_1$  和  $H_2$  根据式(1)、(2)计算求出,而附加磁场  $H'_1$  和  $H'_2$  的解析表达式,可通过下节方法求出.

## 3 铁质球体系统附加磁场的计算

铁质球体的附加磁场是由系统中另一个铁质球体(磁偶极子)对其磁化产生的,而磁偶极子是由相距很近的一对等值异号点磁荷组成的系统,因而磁偶极子对铁质球体的磁化又可以进一步分解为点磁荷对铁质球体的磁化.

### 3.1 点磁荷与磁介质球系统

设相对磁导率为  $\mu_r$ 、半径为  $R$  的线性磁介质球处于磁导率为  $\mu_0$  的真空中,在球外沿  $x$  轴正向与球心的距离为  $d$  处有一点磁荷  $q$ ,以球心  $O$  为坐标原点,如图 2 所示.选用球坐标系,以下分析点磁荷与磁介质球系统的边值问题.

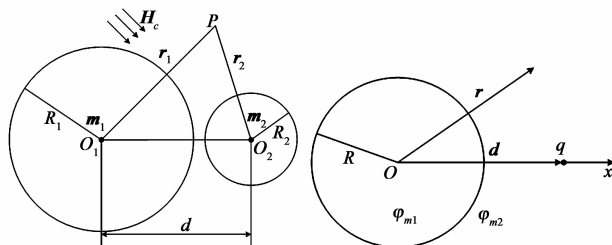


图1 铁质球体系统

图2 点磁荷与磁介质球

若球内和球外区域的磁标位分别用  $\varphi_{m1}$  和  $\varphi_{m2}$  表示,则有

$$\nabla^2 \varphi_{m1} = 0, \quad r < R \quad (4)$$

$$\nabla^2 \varphi_{m2} = -\frac{q}{\mu_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{d}), \quad r > R \quad (5)$$

不同介质分界面上的边界条件

$$\varphi_{m1}|_{r=R} = \varphi_{m2}|_{r=R} \quad (6)$$

$$\mu_0 \mu_r \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r}|_{r=R} = \mu_0 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r}|_{r=R} \quad (7)$$

取无限远处为磁标位参考点,即

$$\varphi_{m2}|_{r=\infty} = 0 \quad (8)$$

当  $r=0$  时,  $\varphi_{m1}$  应为有限值,即

$$\varphi_{m1}|_{r=0} = \text{有限值} \quad (9)$$

以上边值问题仿照点电荷与介电球系统中的分离变量法进行求解<sup>[12]</sup>,然后利用参数积分和变量代换将球外磁标位化为<sup>[13]</sup>

$$\varphi_{m2} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left[ \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}_1|} + \int_0^1 dx \frac{q_2(x)}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}_2(x)|} \right] \quad (10)$$

式中,  $q_1 = \alpha Rq/d$ ,  $\mathbf{d}_1 = (R^2/d) \mathbf{e}_x$ ,  $q_2(x) = q_1 \beta x^{-(1-\beta)}$ ,  $\mathbf{d}_2(x) = (R^2 x/d) \mathbf{e}_x$ ,  $\alpha = (\mu_r - 1)/(\mu_r + 1)$ ,  $\beta = 1/(\mu_r + 1)$ .由式(10)可以看出:第一项是位于  $\mathbf{r} = \mathbf{d}$  处的点磁荷  $q$  产生的磁标位;第二项是位于  $\mathbf{r} = \mathbf{d}_1$  处的镜像磁荷  $-q_1$  产生的磁标位;第三项是分布于原点到  $x = d_1$  点的线段上、线密度为  $dq_2(x)/R^2$  的镜像线磁荷产生的磁标位.可见,球外磁标位的计算需要进行复杂的积分运算.

$q_2(x)$  正比于  $x^{-(1-\beta)}$ ,而磁介质的  $\beta$  为约等于(弱磁物质)或小于(铁磁物质)0.5的正数,因而镜像线磁荷的线密度  $dq_2(x)/R^2$  随  $x$  减小而迅速增大,再根据球体上正、负磁荷量值相等的条件,可以把式(10)第三

项简化等效为在球心  $O$  处的镜像磁荷  $q_1$  产生的磁标位,则式(10)化为

$$\varphi_{m2} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left[ \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|} - \frac{q_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}_1|} + \frac{q_1}{|\mathbf{r}|} \right] \quad (11)$$

由上式可知:在点磁荷与磁介质球系统中,球外磁标位可以看作由  $\mathbf{r}=\mathbf{d}$  处的点磁荷  $q$ 、 $\mathbf{r}=\mathbf{d}_1$  处的镜像磁荷  $-aRq/d$  以及球心  $O$  处的镜像磁荷  $aRq/d$  共同产生的.当然,由于铁磁物质比弱磁物质的相对磁导率要大很多,以上磁标位的简化运算对于铁磁物质更为有效.

### 3.2 附加磁场的计算

铁质球体的附加磁场是由系统中另一个铁质球体(磁偶极子)对其磁化产生的,磁偶极子是由相距很小距离  $l$  的一对等值异号点磁荷  $\pm q$  组成的系统,假设磁偶极子磁矩为  $\mathbf{m}$  (大小等于  $ql$ ,方向由  $-q$  指向  $+q$ ),将其沿坐标轴方向分解为三个分量即  $\mathbf{m} = q_x\mathbf{e}_x + q_y\mathbf{e}_y + q_z\mathbf{e}_z$ ,以下分析磁偶极子磁矩的三个分量对铁质球体的磁化.

图3为  $x$  方向磁偶极子与铁质球体组成的系统,设铁质球体半径为  $R$ ,相对磁导率为  $\mu_r$ ,球心与磁偶极子中心的距离为  $d$ ,磁偶极子磁矩  $\mathbf{m}_x = q_x\mathbf{e}_x$ .利用点磁荷与磁介质球系统的镜像结果,假定  $+q_x$  和  $-q_x$  在球心右侧产生的镜像磁荷分别为  $q'_{1x}$  和  $q''_{2x}$ (与球心的距离分别为  $b_{1x}$  和  $b_{2x}$ ),在球心处产生的镜像磁荷分别为  $q''_{1x}$  和  $q''_{2x}$ ,且令  $\alpha = (\mu_r - 1)/(\mu_r + 1)$ ,则有

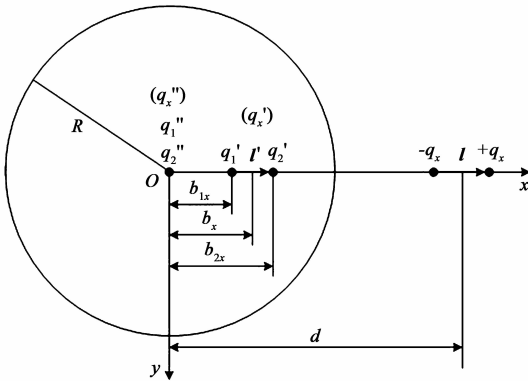


图3  $x$ 方向磁偶极子与铁质球体组成的系统

$$\begin{cases} q'_{1x} = -q''_{1x} = -\frac{\alpha Rq_x}{d + \frac{l}{2}} \\ q'_{2x} = -q''_{2x} = \frac{\alpha Rq_x}{d - \frac{l}{2}} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} b_{1x} = \frac{R^2}{d + \frac{l}{2}} \\ b_{2x} = \frac{R^2}{d - \frac{l}{2}} \end{cases} \quad (13)$$

由于  $l \ll d$ ,则  $q'_{1x}$  与  $q'_{2x}$  的距离为

$$l' = b_{2x} - b_{1x} = \frac{R^2 l}{d^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{R^2 l}{d^2} \quad (14)$$

由于  $q'_{1x}$  为负  $q'_{2x}$  为正,所以  $l'$  与  $l$  的方向相同,即  $l' = l \mathbf{e}_x \cdot q'_{1x}$  与  $q'_{2x}$  的中心位置为

$$b_x = \frac{1}{2}(b_{1x} + b_{2x}) = \frac{R^2 d}{d^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{R^2}{d} \quad (15)$$

把  $q'_{1x}$  和  $q'_{2x}$  分解为两项,即

$$\begin{cases} q'_{1x} = -\frac{\alpha Rq_x}{d + \frac{l}{2}} = -\frac{\alpha Rq_x}{d} + \frac{\alpha Rq_x l}{2(d + \frac{l}{2})d} \\ q'_{2x} = \frac{\alpha Rq_x}{d - \frac{l}{2}} = \frac{\alpha Rq_x}{d} + \frac{\alpha Rq_x l}{2(d - \frac{l}{2})d} \end{cases} \quad (16)$$

先都取  $q'_{1x}$  和  $q'_{2x}$  的第一项,则在  $x = b_x$  处产生一个镜像磁偶极子,其磁矩为

$$\mathbf{m}'_x = \frac{\alpha Rq_x l'}{d} = \alpha \left(\frac{R}{d}\right)^3 \mathbf{m}_x \quad (17)$$

再都取  $q'_{1x}$  和  $q'_{2x}$  的第二项,考虑  $l$  很小,将两项合并,则在  $x = b_x$  处产生一个镜像磁荷

$$q'_x = \frac{\alpha Rq_x l}{2(d + \frac{l}{2})d} + \frac{\alpha Rq_x l}{2(d - \frac{l}{2})d} = \frac{\alpha Rm_x}{d^2} \quad (18)$$

另外,在球心处产生另一个镜像磁荷

$$q''_x = q''_{1x} + q''_{2x} = -\frac{\alpha Rq_x l}{d^2 - \frac{l^2}{4}} = -\frac{\alpha Rm_x}{d^2} \quad (19)$$

可见,  $x$  方向磁偶极子对铁质球体的磁化共产生一个镜像磁偶极子和两个镜像磁荷.

图4为  $y$  方向磁偶极子与铁质球体组成的系统,设铁质球体半径为  $R$ ,相对磁导率为  $\mu_r$ ,球心与磁偶极子中心的距离为  $d$ ,磁偶极子磁矩  $\mathbf{m}_y = q_y\mathbf{e}_y$ .利用点磁荷与磁介质球系统的镜像结果,假定  $+q_y$  和  $-q_y$  在球心右侧产生的镜像磁荷分别为  $q'_{1y}$  和  $q'_{2y}$ (与球心的距离分别为  $b_{1y}$  和  $b_{2y}$ ),在球心处产生的镜像磁荷分别为  $q''_{1y}$  和  $q''_{2y}$ ,且令  $\alpha = (\mu_r - 1)/(\mu_r + 1)$ ,则有

$$\begin{cases} q'_{1y} = -q''_{1y} = -\frac{\alpha Rq_y}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{4}}} \\ q'_{2y} = -q''_{2y} = \frac{\alpha Rq_y}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{4}}} \end{cases} \quad (20)$$

$$b_{1y} = b_{2y} = \frac{R^2}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{4}}} \quad (21)$$

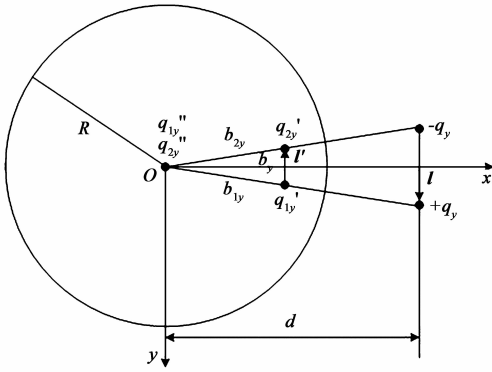


图4 y方向磁偶极子与铁质球体组成的系统

根据几何图形的相似关系,  $q_{1y}'$ 与 $q_{2y}'$ 的距离为

$$l' = \frac{b_{1y}l}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{R^2 l}{d^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{R^2 l}{d^2} \quad (22)$$

由于 $q_{1y}'$ 为负 $q_{2y}'$ 为正,因而 $l'$ 与 $l$ 的方向相反,即 $l' = -l'e_y$ .根据几何图形的相似关系, $q_{1y}'$ 与 $q_{2y}'$ 的中心位置为

$$b_y = \frac{b_{1y}d}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{R^2 d}{d^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{R^2}{d} \quad (23)$$

由于 $|q_{1y}'| = |q_{2y}'|$ ,可知在 $x = b_y$ 处产生一个镜像磁偶极子,其磁矩为

$$m_y' = \frac{\alpha R q_y}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{4}}} l' = -\alpha \left(\frac{R}{d}\right)^3 m_y \quad (24)$$

另外,在球心处产生镜像磁荷

$$q_y'' = q_{1y}' + q_{2y}' = 0 \quad (25)$$

可见,y方向磁偶极子对铁质球体的磁化只产生一个镜像磁偶极子.

因铁质球体系统关于x轴对称,故z方向磁偶极子与y方向磁偶极子对铁质球体的磁化完全相同,即只产生一个磁偶极子,其磁矩为

$$m_z' = -\alpha \left(\frac{R}{d}\right)^3 m_z \quad (26)$$

把以上三个方向的磁偶极子对铁质球体的磁化合并,即在 $x = R^2/d$ 处产生一个镜像磁偶极子磁矩为

$$m' = \alpha \left(\frac{R}{d}\right)^3 (m_x e_x - m_y e_y - m_z e_z) \quad (27)$$

和一个镜像磁荷 $\alpha R m_x / d^2$ 以及在球心处产生另一个镜像磁荷 $-\alpha R m_x / d^2$ .镜像磁偶极子产生的磁场由式(2)计算,镜像磁荷产生的磁场由公式 $q_m r / (4\pi r^3)$ 计算,其中的 $q_m$ 为镜像磁荷.镜像磁偶极子和镜像磁荷产生的总磁场就是附加磁场 $H_1'$ .

同理,可以推导和计算系统中另一个铁质球体的

附加磁场 $H_2'$ ,再根据式(3)即可求出铁质球体系统磁场的镜像解析解.

以上仅是系统中两个铁质球体的一阶相互磁化,仿照准静态电磁场的计算,由一阶相互磁化的结果可求二阶相互磁化(一阶镜像磁偶极子又会产生一个二阶镜像磁偶极子和两个二阶镜像磁荷,一阶镜像磁荷又会产生两个二阶镜像磁荷),进而得到更高阶相互磁化的结果,把各阶相互磁化产生的附加磁场相加可以得到较高精度的附加磁场.

### 4 镜像解析解最大阶数的选择

为了得到高精度的镜像解析解,在计算附加磁场时需要考虑高阶相互磁化的影响.如图5所示,设两个铁质球体半径均为 $R$ ,相对磁导率均为 $\mu_r$ ,球心相距为 $d$ ,外磁场 $H_e$ 在各球球心激发的磁偶极子磁矩为 $m$ ,第 $i$ 阶镜像磁偶极子磁矩、镜像磁荷及位置分别为 $m_i'$ 、 $q_i'$ 和 $d_i$ (球心处镜像磁荷 $q_i''$ 比同阶镜像磁荷 $q_i'$ 的衰减速度要快,为了确定镜像解析解最大阶数,不需要分析 $q_i''$ 以及其产生的镜像磁荷的衰减速度).

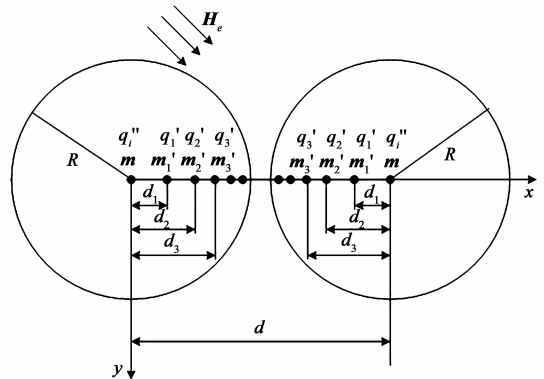


图5 各阶镜像磁偶极子和镜像磁荷的分布

令 $m'_0 = m$ 、 $q'_0 = 0$ 及 $d_0 = 0$ ,则由式(15)、(18)和(27)可得( $i \geq 0$ )

$$\begin{cases} m'_{i+1} = \alpha \left(\frac{R}{d-d_i}\right)^3 (m'_{i,x} e_x - m'_{i,y} e_y - m'_{i,z} e_z) \\ q'_1 = \frac{\alpha R}{d^2} m_x \\ q'_{i+2} = \frac{\alpha R}{(d-d_{i+1})^2} m'_{i+1,x} + \frac{\alpha R}{d-d_{i+1}} q'_{i+1} \approx \frac{\alpha R}{d-d_{i+1}} q'_{i+1} \\ d_{i+1} = \frac{R^2}{d-d_i} \end{cases} \quad (28)$$

上式忽略了镜像磁偶极子 $m'_{i+1,x}$ 产生的镜像磁荷,可以看出:由于 $\alpha = (\mu_r - 1) / (\mu_r + 1) < 1$ 和 $(d - d_i) > R$ ,则 $m'_i$ 和 $q'_i$ 都随阶数的上升而衰减,但又由于 $d_i$ 逐渐增大, $m'_i$ 和 $q'_i$ 的衰减速度将变慢. $m'_i$ 和 $q'_i$ 的衰减速度与

系数  $\alpha[R/(d-d_i)]^3$ 、 $\alpha R/(d-d_i)$  有关,其中的最大系数  $\alpha R/(d-d_i)$  所决定的镜像磁荷衰减速度最慢.假定一阶镜像磁荷的衰减程度为  $\alpha(R/d)^3$ ,定义衰减系数  $\lambda_k (k \geq 2)$

$$\lambda_k = \frac{\alpha R^3}{d^3} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha R}{d-d_i} \quad (29)$$

$\lambda_k$  反映了第  $k$  阶具有最慢衰减速度的镜像磁荷的衰减程度.为了确定镜像解析解最大阶数,分析在  $d=2R$  且  $\alpha=1(\mu_r \rightarrow \infty)$  极限情况下的衰减系数(此时铁质球体相互磁化作用最强,镜像磁偶极子和镜像磁荷的衰减速度最慢,所考虑的阶数最多),其由式(29)及式(28)中第四式计算求出,图6给出了极限情况下衰减系数的变化曲线.由图可以看出,当阶数为40时,衰减系数已经很小且稳定.虽然衰减系数随阶数上升而减小,但镜像磁荷的数目随阶数上升是增加的,如果阶数选择过大,计算量也将变大,所以镜像解析解最大阶数并不是越大越好,在40内选择即可.

以上分析讨论了极限情况下最大阶数的选择,而一般情况下的  $d > 2R$  或  $\alpha < 1(\mu_r$  不太大),则镜像磁偶极子和镜像磁荷的衰减速度更快,此时只需取前几阶相互磁化就可以得到高精度的镜像解析解,图7给出了几种一般情况下衰减系数的变化曲线( $d=2.1R, 2.5R$  和  $3R$ ).

## 5 仿真实验验证

一般来说,剖分单元越多,电磁场问题的数值解就越逼近真解.因此,本仿真实验在兼顾计算时间情况下对铁质球体剖分足够多的单元,将其积分方程法数值解作为真解,来验证铁质球体系统磁场镜像解析解的正确性.

如图8所示,铁质球体系统置于  $x, y$  和  $z$  分量分别为  $33500\text{nT}, 6000\text{nT}$  和  $35000\text{nT}$  的外磁场  $B_e$  中,两个铁质球体的半径分别为  $R$  和  $r$ ,间距为  $l$ ,相对磁导率均为100,计算场点均匀分布在  $x$  轴正下方  $2R$  处的直线上,场点个数为21.为了进行积分方程法数值计算,采用 TrueGrid 软件把每个铁质球体剖分为729个非规则六面体单元<sup>[14]</sup>.仿真实验通过改变  $r$  和  $l$  来验证镜像解析解

的正确性,且为了评估误差大小,定义最大相对误差:  $E_{\max}/B_{i,\max}$ ,其中  $E_{\max}$  为各场点绝对误差的最大值,  $B_{i,\max}$  为各场点真解的最大值.

为了能够对比分析镜像解析解的计算效果,仿真实验计算了在不考虑相互磁化情况下的叠加解,即每个铁质球体单独存在时被外磁场均匀磁化产生磁场的叠加值.图9给出了间距  $l=0$  和  $R/2$  时场点镜像解析解、叠加解与真解的对比曲线( $r=R$ ).由图可知:叠加解严重偏离真解,叠加解的误差随间距  $l$  的减小而增大,当  $l=0$  时,其  $x, y$  和  $z$  分量的最大相对误差分别为  $42.78\%, 14.82\%$  和  $26.27\%$ ,当  $l=R/2$  时,其  $x, y$  和  $z$  分量的最大相对误差分别为  $11.04\%, 8.35\%$  和  $10.11\%$ ,这也说明铁质球体相互磁化程度随间距的减小而加剧;镜像解析解与真解吻合非常好,当  $l=0$  时,其  $x, y$  和  $z$  分量的最大相对误差分别为  $2.02\%, 1.10\%$  和  $1.41\%$ ,当  $l=R/2$  时,其  $x, y$  和  $z$  分量的最大相对误差分别为  $1.33\%, 1.25\%, 1.69\%$ .

图10给出了半径  $r=R/2$  和  $R$  时场点镜像解析解、叠加解与真解的对比曲线( $l=R/10$ ).由图可知:叠加解严重偏离真解,叠加解的误差随半径  $r$  的增大而增大,当  $r=R/2$  时,其  $x, y$  和  $z$  分量的最大相对误差分别为  $9.93\%, 4.52\%$  和  $9.19\%$ ,当  $r=R$  时,其  $x, y$  和  $z$  分量的最大相对误差分别为  $27.08\%, 13.16\%$  和  $19.45\%$ ,这也说明铁质球体相互磁化程度随半径的增大而加剧;镜像解析解与真解吻合非常好,当  $r=R/2$  时,其  $x, y$  和  $z$  分量的最大相对误差分别为  $1.39\%, 1.39\%$  和  $1.83\%$ ,当  $r=R$  时,其  $x, y$  和  $z$  分量的最大相对误差分别为  $1.46\%, 1.14\%$  和  $1.47\%$ .

另外,需要考察镜像解析解在相对磁导率方面的适用范围,图11给出了镜像解析解最大相对误差随相对磁导率变化曲线( $l=0, r=R$ ).由图可知,当铁质球体的相对磁导率大于20时,镜像解析解的三个分量最大相对误差均已很小,其值均小于  $2.2\%$ .事实上,大多数铁磁物质在起始磁化阶段的相对磁导率可达数百至数千,因此,本文镜像解析解适用于各种相对磁导率下铁质球体系统磁场的计算.

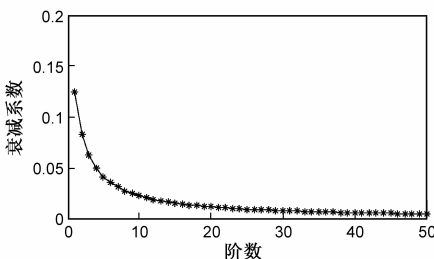


图6 极限情况下衰减系数变化曲线

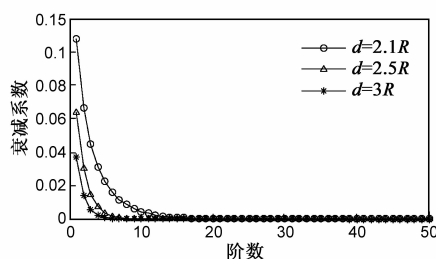


图7 一般情况下衰减系数变化曲线

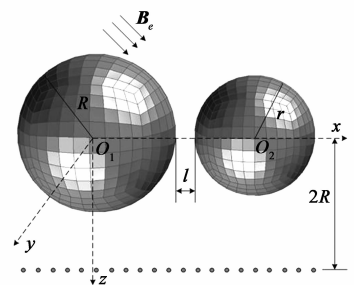


图8 铁质球体系统仿真实验示意图

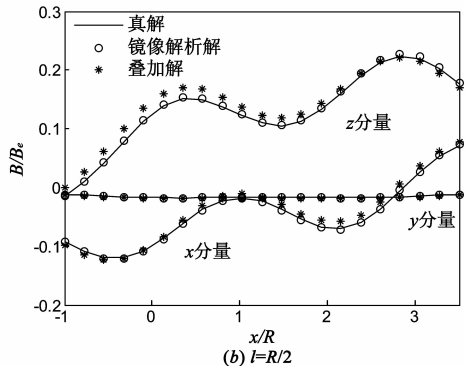
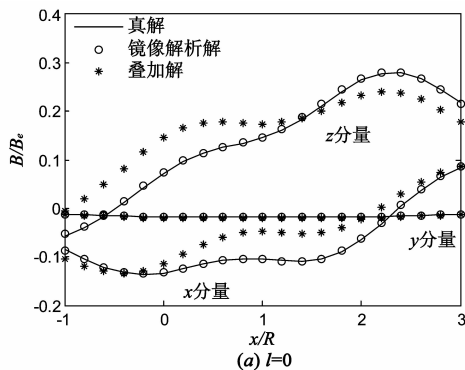


图9 镜像解析解、叠加解与真解的对比曲线

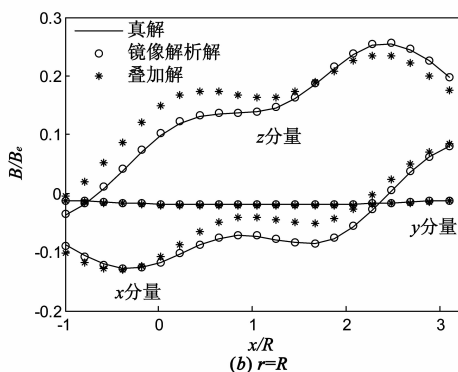
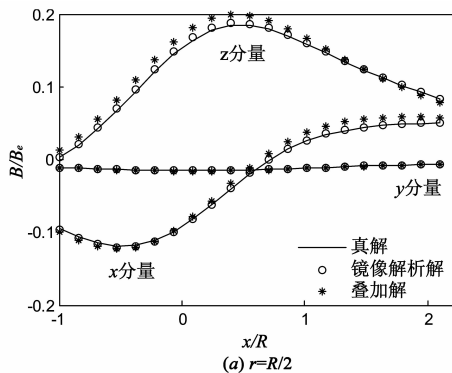


图10 镜像解析解、叠加解与真解的对比曲线

图9~图11中镜像解析解的很小误差主要源于:为了计算各种相对磁导率下铁质球体系统磁场以及避免复杂积分运算,对磁介质球中镜像线磁荷进行简化

等效带来的误差;仿真实验把积分方程法数值解作为真解而带来的误差,如果把铁质球体剖分为更多单元,本文镜像解析解误差则更小。

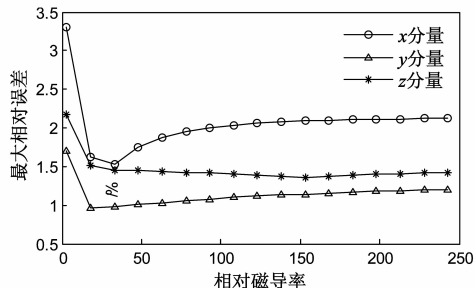


图11 最大相对误差随相对磁导率变化曲线

## 6 结论

本文从点磁荷与磁介质球系统中的镜像法出发,推导出铁质球体系统中镜像磁偶极子和镜像磁荷的表达式,进而求出铁质球体系统磁场的镜像解析解,并分析讨论了镜像解析解最大阶数的选择.仿真实验结果表明了镜像解析解的正确性,且适用于各种相对磁导率下铁质球体系统磁场的计算.仿真实验中镜像解析解的很小误差主要源于对磁介质球中镜像线磁荷进行简化等效以及把积分方程法数值解作为真解而带来的误差.另外,从整个分析推导过程来看,镜像解析解先考虑系统中每个铁质球体被外磁场均匀磁化,再考虑铁质球体之间相互磁化,因而镜像解析解可以推广应用到由两个以上的铁质球体所组成系统磁场的计算.

## 参考文献

- [1] Powell L A, Wereley N M, Ulicny J. Magnetorheological fluids employing substitution of nonmagnetic for magnetic particles to increase yield stress[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2012, 48(11): 3764 - 3767.
- [2] Song Z Y, Cheng Y C, Wu J H, et al. Influence of volume fraction on the yield behavior of giant electrorheological fluid[J]. Applied Physics Letters, 2012, 101(10): 101908 - 3.
- [3] Stoy R D. Induced multipole strengths for two dielectric spheres in an external field[J]. Journal of Applied Physics, 1991, 69(5): 2800 - 2804.
- [4] 金航, 林为干. 介质双球静电问题的解析解[J]. 电子学报, 1991, 19(2): 1 - 7.  
Jin Hang, Lin Wei-gan. Analytic solutions to electrostatic problem of two dielectric spheres[J]. Acta Electronica Sinica, 1991, 19(2): 1 - 7. (in Chinese)
- [5] 张黎阳, 梁昌洪. 用正交函数展开法解介质双球静电问题[J]. 电子学报, 1994, 22(6): 39 - 44.  
Zhang Li-yang, Liang Chang-hong. Analysis of electrostatic problem of two dielectric spheres by orthogonal harmonic

- expansion[J]. Acta Electronica Sinica, 1994, 22(6): 39 – 44. (in Chinese)
- [6] Jones T B, Miller R D. Multipolar interactions of dielectric spheres[J]. Journal of Electrostatics, 1989, 22(3): 231 – 244.
- [7] Washizu M, Jones T B. Multipolar dielectrophoretic force calculation[J]. Journal of Electrostatics, 1994, 33: 187 – 198.
- [8] Washizu M, Jones T B. Dielectrophoretic interaction of two spherical particles calculated by equivalent multipole-moment method[J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 1996, 32(2): 233 – 242.
- [9] 姜泽辉, 许素娟, 陈唯, 等. 像偶极子法计算导体颗粒簇团的偶极矩[J]. 物理学报, 2000, 49(8): 1457 – 1463.  
Jiang Ze-hui, Xu Su-juan, Chen Wei, et al. Image dipole method for the dipole moments of conducting particle clusters[J]. Acta Physica Sinica, 2000, 49(8): 1457 – 1463. (in Chinese)
- [10] Jiang Z H. Electrostatic interaction of two unequal conducting spheres in uniform electric field[J]. Journal of Electrostatics, 2003, 58(4): 247 – 264.
- [11] Gao X, Hu L, Sun G. Multiple image method for the two conductor spheres in a uniform electrostatic field[J]. Communications in Theoretical Physics, 2012, 57(6): 1066 – 1070.
- [12] 李子军, 李根全, 白旭芳. 点电荷与介质球系统电势的计算和讨论[J]. 大学物理, 2003, 22(5): 9 – 12.  
Li Zi-jun, Li Gen-quan, Bai Xu-fang. Calculation and discussion of the potential of a system for a point charge and a dielectric sphere[J]. College Physics, 2003, 22(5): 9 – 12. (in Chinese)
- [13] 汪映海, 杨双强. 点电荷和介质球系统的镜像电荷分布[J]. 物理, 1986, 15(12): 762 – 765.
- [14] 周国华, 肖昌汉, 刘胜道, 等. 基于六面体单元表面磁场积分法求解三维静磁场[J]. 电工技术学报, 2009, 24(3): 1 – 7.  
Zhou Guo-hua, Xiao Chang-han, Liu Sheng-dao, et al. 3D magnetostatic field computation with hexahedral surface integral equation method [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2009, 24(3): 1 – 7. (in Chinese)

### 作者简介



**姚振宁** 男, 1987年出生于河南商丘. 海军工程大学电气工程学院博士研究生, 主要研究方向为电磁环境与防护工程.

E-mail: yaozhenning1987@163.com



**刘大明** 男, 1956年出生于江西南昌. 海军工程大学电气工程学院教授, 主要研究方向为电磁环境与防护工程.